NOUVELLES MÉTHODES

POUR LA DÉTERMINATION

DES

ORBITES DES COMÈTES;

PAR A. M. LEGENDRE,

Membre de l'Institut et de la Légion d'honneur, de la Société royale de Londres, &c.

A PARIS,

Chez Firmin DIDOT, Libraire pour les Mathématiques, la Marine, l'Architecture, et les Éditions stéréotypes, rue de Thionville, n° 116.

AN XIII — 1805.

APPENDICE.

Sur la Méthode des moindres quarrés.

Dans la plupart des questions où il s'agit de tirer des mesures données par l'observation, les résultats les plus exacts qu'elles peuvent offrir, on est presque toujours conduit à un système d'équations de la forme

$$E = a + bx + cy + fz + \&c.$$

dans lesquelles a, b, c, f, &c. sont des coëfficiens connus, qui varient d'une équation à l'autre, et x, y, z, &c. sont des inconnues qu'il faut déterminer par la condition que la valeur de E se réduise, pour chaque équation, à une quantité ou nulle ou très-petite.

Si l'on a autant d'équations que d'inconnues x, y, z, &c., il n'y a aucune difficulté pour la détermination de ces inconnues, et on peut rendre les erreurs E absolument nulles. Mais le plus souvent, le nombre des équations est supérieur à celui des inconnues, et il est impossible d'anéantir toutes les erreurs.

Dans cette circonstance, qui est celle de la plupart des problêmes physiques et astronomiques, où l'on cherche à déterminer quelques élémens importans, il entre nécessairement de l'arbitraire dans la distribution des erreurs, et on ne doit pas s'attendre que toutes les hypothèses conduiront exactement aux mêmes résultats; mais il faut sur-tout faire en sorte que les erreurs extrêmes, sans avoir égard à leurs signes, soient renfermées dans les limites les plus étroites qu'il est possible.

De tous les principes qu'on peut proposer pour cet objet, je pense qu'il n'en est pas de plus général, de plus exact, ni d'une application plus facile que celui dont nous avons fait usage dans les recherches précédentes, et qui consiste à rendre

minimum la somme des quarrés des erreurs. Par ce moyen, il s'établit entre les erreurs une sorte d'équilibre qui empêchant les extrêmes de prévaloir, est très-propre à faire connoître l'état du système le plus proche de la vérité.

La somme des quarrés des erreurs $E^2 + E'^2 + E''^2 +$ &c. étant

$$\begin{aligned} &(a + bx + cy + fz + \&c.)^2 \\ + &(a' + b'x + c'y + f'z + \&c.)^2 \\ + &(a'' + b''x + c''y + f''z + \&c.)^2 \\ + &\&c.\,; \end{aligned}$$

si l'on cherche son *minimum*, en faisant varier x seule, on aura l'équation

$$o = \int ab + x\int b^2 + y\int bc + z\int bf + \&c.,$$

dans laquelle par $\int ab$ on entend la somme des produits semblables $ab + a'b' + a''b'' +$ &c.; par $\int b^2$ la somme des quarrés des coëfficiens de x, savoir $b^2 + b'^2 + b''^2 +$ &c., ainsi de suite.

Le *minimum*, par rapport à y, donnera semblablement

$$o = \int ac + x\int bc + y\int c^2 + z\int fc + \&c.,$$

et le *minimum* par rapport à z,

$$o = \int af + x\int bf + y\int cf + z\int f^2 + \&c.,$$

où l'on voit que les mêmes coëfficiens $\int bc$, $\int bf$, &c. sont communs à deux équations, ce qui contribue à faciliter le calcul.

En général, *pour former l'équation du* minimum *par rapport à l'une des inconnues, il faut multiplier tous les termes de chaque équation proposée par le coëfficient de l'inconnue dans cette équation, pris avec son signe, et faire une somme de tous ces produits.*

On obtiendra de cette manière autant d'équations du *minimum*, qu'il y a d'inconnues, et il faudra résoudre ces équations par les méthodes ordinaires. Mais on aura soin d'abréger tous les calculs, tant des multiplications que de la résolution, en n'admettant dans chaque opération que le nombre de chiffres

entiers ou décimaux que peut exiger le degré d'approximation dont la question est susceptible.

Si par un hasard singulier, il étoit possible de satisfaire à toutes les équations en rendant toutes les erreurs nulles, on obtiendroit également ce résultat par les équations du *minimum ;* car si après avoir trouvé les valeurs de x, y, z, &c. qui rendent nulles E, E′, &c., on fait varier x, y, z, &c. de δx, δy, δz, &c., il est évident que E^2 qui étoit zéro deviendra par cette variation $(a\delta x + b\delta y + c\delta z$, &c.$)^2$. Il en sera de même de E'^2, E''^2, &c. D'où l'on voit que la somme des quarrés des erreurs aura pour variation une quantité du second ordre par rapport à δx, δy, &c.; ce qui s'accorde avec la nature du *minimum.*

Si après avoir déterminé toutes les inconnues x, y, z, &c., on substitue leurs valeurs dans les équations proposées, on connoîtra les diverses erreurs E, E′, E″, &c. auxquelles ce système donne lieu, et qui ne peuvent être réduites sans augmenter la somme de leurs quarrés. Si parmi ces erreurs il s'en trouve que l'on juge trop grandes pour être admises, alors on rejettera les équations qui ont produit ces erreurs, comme venant d'expériences trop défectueuses, et on déterminera les inconnues par le moyen des équations restantes, qui alors donneront des erreurs beaucoup moindres. Et il est à observer qu'on ne sera pas obligé alors de recommencer tous les calculs ; car comme les équations du *minimum* se forment par l'addition des produits faits dans chacune des équations proposées, il suffira d'écarter de l'addition les produits donnés par les équations qui auront conduit à des erreurs trop considérables.

La règle par laquelle on prend le milieu entre les résultats de différentes observations, n'est qu'une conséquence très-simple de notre méthode générale, que nous appellerons *Méthode des moindres quarrés.*

En effet, si l'expérience a donné diverses valeurs a', a'', a''', &c.

pour une certaine quantité x, la somme des quarrés des erreurs sera $(a'-x)^2+(a''-x)^2+(a'''-x)^2+$ &c., et en égalant cette somme à un *minimum*, on a

$$o=(a'-x)+(a''-x)+(a'''-x)+\text{\&c.};$$

d'où résulte $x=\frac{a'+a''+a'''+\text{\&c.}}{n}$, n étant le nombre des observations.

Pareillement, si pour déterminer la position d'un point dans l'espace, on a trouvé, par une première expérience, les coordonnées a', b', c'; par une seconde, les coordonnées a'', b'', c'', &c. ainsi de suite; soient x, y, z, les véritables coordonnées de ce point : alors l'erreur de la première expérience sera la distance du point (a', b', c') au point (x, y, z); le quarré de cette distance est

$$(a'-x)^2+(b'-y)^2+(c'-z)^2;$$

et la somme des quarrés semblables étant égalée à un *minimum*, on en tire trois équations qui donnent $x=\frac{\int a}{n}$, $y=\frac{\int b}{n}$, $z=\frac{\int c}{n}$, n étant le nombre des points donnés par l'expérience. Ces formules sont les mêmes par lesquelles on trouveroit le centre de gravité commun de plusieurs masses égales, situées dans les points donnés; d'où l'on voit que le centre de gravité d'un corps quelconque jouit de cette propriété générale.

Si on divise la masse d'un corps en molécules égales et assez petites pour être considérées comme des points, la somme des quarrés des distances des molécules au centre de gravité sera un minimum.

On voit donc que la méthode des moindres quarrés fait connoître, en quelque sorte, le centre autour duquel viennent se ranger tous les résultats fournis par l'expérience, de manière à s'en écarter le moins qu'il est possible. L'application que nous allons faire de cette méthode à la mesure de la méridienne, achèvera de mettre dans tout son jour sa simplicité et sa fécondité.

Application à la mesure des degrés du méridien.

Supposant que le méridien est une ellipse dont les axes sont dans le rapport de 1 à $1+\alpha$, si on désigne par D la longueur du 45ème degré, et par S celle de l'arc compris entre les deux latitudes L et L', on aura par les formules connues, et en exprimant L'—L en degrés :

$$S = D(L'-L) - \tfrac{3}{2}\alpha D.\frac{180}{\pi} \sin(L'-L)\cos(L'+L);$$

d'où résulte

$$L'-L = \frac{S}{D} + \tfrac{3}{2}\alpha.\frac{180}{\pi} \sin(L'-L)\cos(L'+L).$$

Comme le 45ème degré est d'environ 28500 modules, égaux chacun à deux toises, on peut faire $\frac{1}{D} = \frac{1+\epsilon}{28500}$, ϵ étant une fraction très-petite ; et on aura

$$L'-L = \frac{S}{28500} + \epsilon.\frac{S}{28500} + \alpha.\frac{270}{\pi} \sin(L'-L)\cos(L'+L), \quad (a)$$

équation qui pour chaque arc dont on connoît la longueur avec la latitude de ses extrémités, donnera une relation entre α et ϵ.

Voici maintenant les longueurs des différens arcs de la méridienne de France et les latitudes des parallèles qui les séparent, telles qu'elles résultent de l'opération exécutée par les célèbres astronomes Delambre et Méchain.

Lieu de l'observation.	*Sa latitude.*	*Arcs compris exprimés en modules.*	L' — L	L' + L
Dunkerque	51° 2' 10" 50			
		DP 62472.59	2° 11' 20" 75	99° 53' 0"
Panthéon à Paris	48 50 49.75			
		PE 76145.74	2 40 7.25	95 1 32
Evaux............	46 10 42.50			
		EC 84424.55	2 57 48.10	89 23 37
Carcassonne.....	43 12 54.40			
		CM 52749.48	1 51 9.60	84 34 39
Montjouy........	41 21 44 80			

Nous avons donc quatre arcs dont les mesures étant substituées successivement dans l'équation (a), fourniront quatre équations entre α et β. Mais comme ces quatre équations ne peuvent pas être satisfaites toutes à-la-fois, nous supposerons qu'elles ont lieu, en attribuant une certaine erreur à la latitude de chaque lieu, et nous appellerons E', E'', &c. les corrections additives aux latitudes de Dunkerque, du Panthéon, &c. Ces erreurs n'entrent que dans le premier membre de chaque équation : elles sont trop petites pour affecter le terme multiplié par α dans le second membre. Voici donc les équations qui résultent des quatre arcs mesurés dans l'opération de la méridienne,

$$\begin{aligned}
E' - E'' &= 0.002923 + \beta(2.192) - \alpha(0.563)\\
E'' - E''' &= 0.003100 + \beta(2.672) - \alpha(0.351)\\
E''' - E^{\text{IV}} &= -0.001096 + \beta(2.962) + \alpha(0.047)\\
E^{\text{IV}} - E^{\text{V}} &= -0.001808 + \beta(1.851) + \alpha(0.263)
\end{aligned}$$

Comme il importe de considérer les erreurs séparément, on regardera comme une nouvelle inconnue l'erreur E''', par exemple, et on aura les cinq équations :

$$\begin{aligned}
E' &= E''' + 0.006023 + \beta(4.864) - \alpha(0.914)\\
E'' &= E''' + 0.003100 + \beta(2.672) - \alpha(0.351)\\
E''' &= E''' \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (b)\\
E^{\text{IV}} &= E''' + 0.001096 - \beta(2.962) - \alpha(0.047)\\
E^{\text{V}} &= E''' + 0.002904 - \beta(4.813) - \alpha(0.310)
\end{aligned}$$

Il faut maintenant faire en sorte que la somme des quarrés de ces cinq erreurs soit un *minimum*, et d'abord cette condition exprimée par rapport à l'inconnue E''' dont tous les coëfficiens sont 1, donne par l'addition de toutes ces équations :

$$0 = 5E''' + 0.013123 - \beta(0.239) - \alpha(1.622)$$
$$\text{donc } E''' = -0.002625 + \beta(0.048) + \alpha(0.324).$$

Substituant cette valeur dans les cinq équations (b), on aura

$$
\begin{array}{ll}
E' = & 0.003398 + \beta(4.912) - \alpha(0.590) \\
E'' = & 0.000475 + \beta(2.720) - \alpha(0.027) \\
E''' = & -0.002625 + \beta(0.048) + \alpha(0.324) \\
E^{iv} = & -0.001529 - \beta(2.914) + \alpha(0.277) \\
E^{v} = & 0.000279 - \beta(4.765) + \alpha(0.014)
\end{array} \qquad (c)
$$

Pour exprimer ensuite la condition du *minimum* par rapport à β, il faut multiplier la première équation par 4,912 coëfficient de β; la seconde, par 2.720; la troisième, par 0.048; la quatrième, par -2.914; la cinquième, par -4.765, et égaler à zéro la somme de tous les produits. On opérera semblablement par rapport à α, et on aura les deux équations;

$$
\begin{array}{ll}
0 = & 0.020983 + \beta(62.726) - \alpha(3.830) \\
0 = & -0.003287 - \beta(3.830) + \alpha(0.531)
\end{array} \qquad (d)
$$

d'où l'on tire $\alpha = 0.00675$, et $\beta = 0.0000778$; donc

$$\text{l'aplatissement } \alpha = \frac{1}{148}$$

$$\text{et le } 45^{\text{ème}} \text{ degré } D = \frac{28500}{1+\beta} = 28497.78.$$

L'aplatissement déterminé par la longueur du pendule et par quelques phénomènes astronomiques, n'est que de $\frac{1}{320}$, et le $45^{\text{ème}}$ degré tel qu'on l'a déduit de la comparaison des mesures faites en France avec les mesures faites au Pérou, est de 28504.10. C'est sur ce dernier résultat qu'est fondée la détermination définitive du mètre : il devroit être diminué d'environ un $4500^{\text{ème}}$, si on s'en tenoit aux seules mesures exécutées en France; mais l'aplatissement $\frac{1}{148}$ trop peu d'accord avec celui que l'on connoît par d'autres phénomènes, ne permet pas d'adopter ce dernier parti.

Les valeurs trouvées pour α et β, déterminent l'ellipse qui satisfait aussi exactement qu'il est possible aux mesures de l'arc du méridien compris entre Dunkerque et Barcelonne. Cette ellipse est beaucoup plus aplatie que celle qui convient à la

figure générale du globe; elle suppose dans les latitudes observées des erreurs que l'on déterminera en substituant les valeurs trouvées pour α et ϵ, dans les expressions de E′, E″, &c. : on trouvera, en réduisant ces erreurs en secondes,

$$E' = -0''73,\ E'' = 1''83,\ E''' = -1''55,\ E^{\text{iv}} = 0''42,\ E^{\text{v}} = 0''03.$$

La plus grande de toutes ne monte pas à 2″, et la moyenne, sans égard aux signes, n'est que de 0″91.

Si au lieu de chercher les deux quantités α et ϵ qui conviennent au *minimum* absolu, on commence par faire la quantité α égale à l'aplatissement connu $\frac{1}{320}$, les équations (c) deviendront

$$\begin{aligned} E' &= 0.001554 + \epsilon(4.912) \\ E'' &= 0.000391 + \epsilon(2.720) \\ E''' &= -0.001612 + \epsilon(0.048) \\ E^{\text{iv}} &= -0.000663 - \epsilon(2.914) \\ E^{\text{v}} &= 0.000323 - \epsilon(4.765) \end{aligned}$$

et on aura pour l'équation du *minimum*, $0 = 0.009010 + \epsilon(62.726)$, d'où résulte $\epsilon = -0.0001436$; donc

$$\text{le } 45^{\text{ème}} \text{ degré} = 28500(1 - \epsilon) = 28504.09\,;$$

ce qui s'accorde suffisamment avec la détermination adoptée ; mais alors les erreurs E′, E″, &c. exprimées en secondes, deviennent

$$E' = 3''06,\ E'' = 0''00,\ E''' = -5''83,\ E^{\text{iv}} = -0''88,\ E^{\text{v}} = 3''62.$$

Ces erreurs sont plus fortes qu'elles n'étoient dans le cas du *minimum* absolu ; la plus grande tombe sur la latitude d'Evaux, et la moindre, qui est même entièrement nulle, sur celle du Panthéon.

Au reste, les anomalies dans les latitudes, qui sans aucun doute ne doivent point être attribuées aux observations, tiennent vraisemblablement à des attractions locales qui agissent irrégulièrement sur le fil à plomb. Il suffit, pour cela, d'un défaut d'homogénéité dans les couches qui avoisinent le point où l'on

observe la latitude ; et la même cause qui rapproche le zénith apparent du midi ou du nord, peut aussi le détourner de quelques secondes vers l'est ou vers l'ouest ; ce qui explique les inégalités qu'on a aussi observées dans les azimuths.

Il résulte de l'existence bien constatée de ces anomalies, que la longueur des arcs du méridien est moins propre que celle du pendule, à la détermination d'une mesure universelle ; et il n'est pas étonnant que des observateurs, d'ailleurs très-exacts, ne se soient pas accordés dans les mesures qu'ils ont prises des degrés du méridien, puisqu'à raison des attractions locales, les latitudes de deux lieux également éloignés de l'équateur, pourroient différer entre elles de plusieurs secondes.

Paris, le 15 ventôse an 13.
6 mars 1805.

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.